DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° VI : Logarithme , exponentielle et suit TS4 2013

TS4 Rédiger avec soin 3 exercices parmi les 6

A rendre le mercredi 9 janvier 2013 à 8 heures

Exercice VI1

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite $(u_n)_{n>0}$ de nombres strictement positifs par

$$u_n = \frac{n^2}{2^n}.$$

Pour tout $n > 0$, on pose

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

1. Montrer que $v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$.
2. En déduire que pour tout $n > 0$, $v_n > \frac{1}{2}$.
3. Trouver à la calculatrice un entier N tel que $v_N < \frac{3}{4}$. Justifier que si $n \geq N$ alors $v_n < \frac{3}{4}$.
4. En déduire que si $n \geq N$ alors $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$.
5. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 5$, on a $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.
6. En déduire la limite de (u_n).

Exercice VI2

Résoudre

1. $(7x-5)\ln(x+1) > 0$
2. $\ln(5-x) - \ln 3 + \ln(x-1) \leq 0$.

Exercice VI3 Une ROC ?

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, un résultat de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, positive sur $[1;+\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif} x,\ [\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

1. Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0;+\infty[$.
2. En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$.
3. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Exercice VI4

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{1+x} + e^{1-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{2}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et $\mathscr{C}_g$ celle de g. Pour tout réel a, on note

– A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et $\mathrm{T_A}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A,
– B le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a et $\mathrm{T_B}$ la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point B,
– $\mathrm{M}(x_\mathrm{M}\,;\,y_\mathrm{M})$ le point d'intersection de $\mathrm{T_A}$ et de $\mathrm{T_B}$.

On souhaite étudier le lieu géométrique $\mathscr{E}$ du point M *lorsque a varie dans* $\mathbb{R}$.

1. Faire une figure à l'aide de GeoGebra et activer la trace du point M à l'aide de votre figure :

a) émettre une conjecture sur une relation entre a et x_M ;

b) le point M semble appartenir à la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ d'une fonction h connue. Quelle semble-être cette fonction h ? Représenter sa courbe sur votre figure.

2. Démontrer qu'effectivement si $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$ alors $\mathrm{M} \in \mathscr{C}_h$.

3. Étudier la réciproque puis conclure.

Exercice VI5

Soit f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x - \ln x} & \text{pour } x > 0 \\ -1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

On note la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+1] = 0$ et en déduire que f est continue en 0.

b) Démontrer que f est dérivable en 0. Déterminer $f'(0)$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire ?

2. Étudier la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3. Montrer que le signe de f' est celui de $(1-\ln x)$. Dresser le tableau de variation de f.

4. Préciser le point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses et déterminer l'équation de la tangente en ce point. Tracer C_f.

Exercice VI6

Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$$

1. On appelle g la fonction définie sur I par $g(x) = \tan x - x$.

a) Déterminer les limites de g aux bornes de I.

b) Étudier les variations de g.

c) Calculer $g(0)$ et déterminer le signe de $g(x)$ sur I.

2. a) Justifier que f est dérivable sur I et calculer f'.

b) Factoriser $f'(x)$ pour tout x de I puis, en utilisant la question 1., déterminer le signe de $f'(x)$ sur I.

c) Déterminer les variations de f sur I. En déduire le signe de f sur I.