DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° II : Récurrence,Suites

TS4 A rendre le mercredi 10 octobre (8h)

Exercice II 1

La suite de FIBONACCI [a] est la suite (U_n) définie par $U_1 = U_2 = 1$ et la relation de récurrence pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \tag{1}$$

1. Calculer les dix premiers termes de la suite de Fibonacci.

Il a fallu attendre 500 ans pour trouver l'expression du terme général de la suite de Fibonacci. Je vous propose une démonstration de l'étonnante [b] formule découverte par DE MOIVRE [c] :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{2}$$

2. Supposons un instant que (V_n) soit une suite géométrique non nulle vérifiant la même relation de récurrence que (U_n). Prouver alors que la raison de (V_n) est nécessairement solution de :

$$x^2 = x + 1 \tag{3}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (3). On notera ϕ (le nombre d'or) la racine positive et $\bar{\phi}$ la racine négative de (3).

4. La suite de Fibonacci est–elle une suite géométrique ?

5. En utilisant uniquement l'équation (3) vérifiée par ϕ , exprimer ϕ^n pour n valant 2, 3, 4, 5, puis 6 sous la forme $a\phi + b$ où à chaque fois a et b sont des entiers naturels. On reproduira et complètera alors le tableau ci–dessous avec les valeurs obtenues pour a et b. Que remarque-t-on sur les coefficients a et b ?

n	1	2	3	4	5	6
a	1	1				
b	0	1				

6. Prouver alors par récurrence que pour tout entier n supérieur à 2 :

$$\phi^n = U_n \times \phi + U_{n-1}$$

7. En déduire la formule (2).

Indication : Peut-on traiter la question (5) en remplaçant ϕ par $\bar{\phi}$?

8. En déduire la limite de U_n.

9. On s'intéresse maintenant aux quotients de deux termes successifs de la suite de Fibonacci. On considère donc la suite (Q_n) définie par : $Q_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q_n = \frac{\phi - \bar{\phi}\left(\frac{\bar{\phi}}{\phi}\right)^n}{1 - \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi}\right)^n}$$

10. Prouver que [d] : $\lim\limits_{n \to +\infty} Q_n = \phi$.

11. Prouver en utilisant (1) que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est déterminée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q_{n+1} = 1 + \frac{1}{Q_n} \quad \text{et} \quad Q_1 = 1$$

12. Expliquer l'écriture de ϕ dite en « fraction continue » : $\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$

---

a. Très célèbre, particulièrement depuis le succès du livre *Da Vinci Code*. FIBONACCI (Pise 1170–1245)
b. Pourquoi peut–on trouver cette formule étonnante au premier abord ?
c. Abraham DE MOIVRE (Vitry le François 1667– Londres 1754) Mathématicien français, ami d'Isaac NEWTON.
d. Cette limite signifie que (U_n) se comporte pour n grand « comme » une suite géométrique de raison ϕ.