DEVOIR EN TEMPS LIBRE N ° V : Fonctions ln, exponentielle TS3 2014

TS3 A rendre le vendredi 13 décembre 2013

Exercice 1 (8 points)

Partie

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2e^x - x - 2$$

Partie A

1. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations complet.
3. Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles, vérifier que 0 est l'une de ces solutions ; l'autre solution sera notée α.
4. Donner un encadrement de α à 10^{-2}.
5. En déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Prouver que $f(\alpha) = -\dfrac{1}{4}\alpha(\alpha+2)$.
3. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$
4. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ puis démontrer que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.
5. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations complet.
6. Tracer la courbe (C) de la fonction f dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 1 cm.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Etudier les variations de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
4. *a*) Montrer que $X^3 - 3X - 2 = (X-2)(X+1)^2$
   b) Résoudre les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 2$.
5. Tracer la tangente, placer les points trouvés à la question précédente et tracer $\mathcal{C}$.
6. *a*) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution dans $[e ; +\infty[$. On note α_n cette solution.
   b) Sur la page annexe, on a tracé $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Placer les nombres α_1, α_2 et α_4 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
   c) Encadrer α_1 à 10^{-2} près.
   d) Démontrer que la suite (α_n) est strictement décroissante.
   e) Prouver que la suite (α_n) est convergente.