Un algorithme ? ...

Exercice 1 Étude de sommes

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit $s_n = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \ldots \dfrac{1}{n(n-1)} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(k-1)}$.

On définit aussi pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

1. Étude de (s_n).
   a) Calculer s_5.
   b) Déterminer $a,b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$.
   c) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $s_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.
   d) Déterminer la limite de (s_n). À partir de quel n a-t-on $1 - s_n < 10^{-5}$?
2. Étude de (S_n).
   a) Étudier les variations de (S_n).
   b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $S_n \leq 1 + s_n$. En déduire : $S_n \leq 2$.
   c) Montrer que (S_n) converge vers une limite ℓ.
   d) Écrire l'algorithme d'un programme qui saisi un entier $n \geq 1$ et affiche S_n.
   e) Utiliser le programme pour obtenir une approximation de $S_{1\,000}$ et donner une valeur approchée de $\sqrt{6S_{1\,000}}$. Conjecturer la valeur de la limite.

Exercice 2 Comment fonctionne la touche `Frac` ?

L'objectif est d'écrire le nombre 0,27272727... sous forme de fraction.
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 0{,}27$ et de raison $\frac{1}{100}$.

Soit (s_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 ainsi que s_0,s_1,s_2 et s_3. On exprimera les résultats sous forme de nombres décimaux. (avec virgules)
2. Donner, sous forme décimale, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer s_n en fonction de n.
4. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n$ sous forme d'une fraction et conclure.
5. Imiter la démarche pour obtenir l'écriture de 0,481481481... sous forme de fraction.

Exercice 3 Une suite explicite

Soit (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n + \cos(n)$. Variations et limite de (u_n) ?