DEVOIR EN TEMPS LIBRE N ° VII : Calcul intégral TS3 2014

TS3 Janvier 2014

Exercice 1

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\cos^2 x$ et $g(x) = (2x+1)\sin^2 x$

$$\text{On pose } \mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } \mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer $\mathrm{I}+\mathrm{J}$.
   $\mathrm{I}+\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\sin^2(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos^2(x)dx$
   soit $\mathrm{I}+\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)(\sin^2(x)+\cos^2(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)dx = \left[x^2+x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4}$.
   $$\boxed{\mathrm{I}+\mathrm{J} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4}.}$$
2. Montrer que $\mathrm{I}-\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos(2x)\,\mathrm{d}x$
   $\mathrm{I}-\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\sin^2(x)dx$ soit $\mathrm{I}-\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)(\cos^2(x)-\sin^2(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos(2x)dx$
   $$\boxed{\text{Soit } \mathrm{I}-\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos(2x)\,\mathrm{d}x}$$
   En effet on sait que $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$
3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x+1)\sin 2x$.
   Calculer $h'(x)$ et en déduire une primitive de $k : x \mapsto (2x+1)\sin 2x$.
   Déjà h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, par ailleurs $h = uv$ où $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = \cos 2x$, on déduit alors $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2\cos 2x$
   De $h' = u'v + v'u$, on déduit $h'(x) = 2\sin 2x + 2\cos 2x \times (2x+1)$
   $$\boxed{h'(x) = 2\sin 2x + 2(2x+1)\cos 2x}$$
   $k(x) = (2x+1)\cos 2x$, on a donc $h'(x) = 2\sin 2x + 2k(x)$
   Soit $2k(x) = -2\sin 2x + h'(x)$
   $k(x) = -\sin 2x + \frac{1}{2}h'(x)$
   D'où K une primitive de k : $\mathrm{K}(x) = -\frac{\cos 2x}{-2} + \frac{1}{2}h(x)$
   $$\boxed{\text{Une primitive de } k : x \mapsto (2x+1)\cos 2x \text{ est donc } \mathrm{K} \mapsto \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}(2x+1)\sin 2x}$$
4. Calculer $\mathrm{I}-\mathrm{J}$ et en déduire les valeurs exactes des nombres I et J.
   $\mathrm{I}-\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} k(x)\,\mathrm{d}x = [\mathrm{K}(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \mathrm{K}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \mathrm{K}(0)$
   Or $\mathrm{K}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(2\times\frac{\pi}{4}\right) + \left(2\times\frac{\pi}{4}+1\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)0 + \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\times 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$;
   On trouve $\mathrm{K}(0) = \frac{1}{2}$ et donc
   $$\boxed{\mathrm{I}-\mathrm{J} = \frac{\pi}{4}}$$
   $$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{I}+\mathrm{J} & = & \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4} \\ \mathrm{I}-\mathrm{J} & = & \frac{\pi}{4} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2\mathrm{J} & = & \frac{\pi^2}{16}\,\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{I} & = & \frac{\pi}{4} + \mathrm{J} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{J} & = & \frac{\pi^2}{32} \\ \mathrm{I} & = & \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4} \end{array}\right.$$
5. Calculer les valeurs moyennes des fonctions f et g sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
   La valeur moyenne de la fonction f sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ est
   $$\mathrm{I}_f = \frac{1}{\frac{\pi}{4}-0} \times = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi} \times \mathrm{I} = \frac{4}{\pi} \times \left(\frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\pi}{8}$$
   La valeur moyenne de la fonction g sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ est
   $$\mathrm{I}_g = \frac{1}{\frac{\pi}{4}-0} \times = \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi} \times \mathrm{J} = \frac{4}{\pi}\frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{8}$$

$$\mathrm{I}_f = 1 + \frac{\pi}{8} \text{ et } \mathrm{I}_g = \frac{\pi}{8}$$

Exercice 2

Le but de l'exercice est de donner un encadrement du nombre I défini par :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$.

1. Pour tout réel x de $[0 ; 1]$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x[(1+x)-1]}{(1+x)^2} = \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}.$$

Comme $x \geqslant 0$ et que pour tout réel x, e^x est > 0, on a $f'(x) \geqslant 0$.
Donc f est croissante sur $[0 ; 1]$.

2. *a*) On partage l'intervalle $[0 ; 1]$ en cinq intervalles de même longueur $\dfrac{1}{5}$.
Si bien que :

$$[0 ; 1] = \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant 4} \left[\frac{k}{5} ; \frac{k+1}{5}\right].$$

ou de façon plus explicite : $[0 ; 1] = \left[0 ; \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{1}{5} ; \frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5} ; \frac{4}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{5} ; 1\right]$ Soit k un entier compris entre 0 et 4. La fonction f étant croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$, elle l'est en particulier sur l'intervalle $\mathrm{I}_k = \left[\frac{k}{5} ; \frac{k+1}{5}\right]$.

Donc pour tout x de I_k :

$$f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{k+1}{5}\right).$$

Il découle alors de l'inégalité de la moyenne que :

$$\frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$

i.e. :

$$\frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$

et ceci, quel que soit l'entier k compris entre 0 et 4.

Interprétation graphique : la fonction f étant continue et positive sur l'intervalle I_k, l'intégrale ci-dessus représente l'aire sous la courbe de la fonction f, exprimée en unité d'aire.
On en déduit que cette aire est comprise entre l'aire du rectangle r_K, situé au-dessous de la courbe, et celle du rectangle R_K, situé au-dessus de la courbe, ces rectangles ayant pour base $\dfrac{1}{5}$ et pour hauteurs respectives $f\left(\dfrac{k}{5}\right)$ et $f\left(\dfrac{k+1}{5}\right)$.

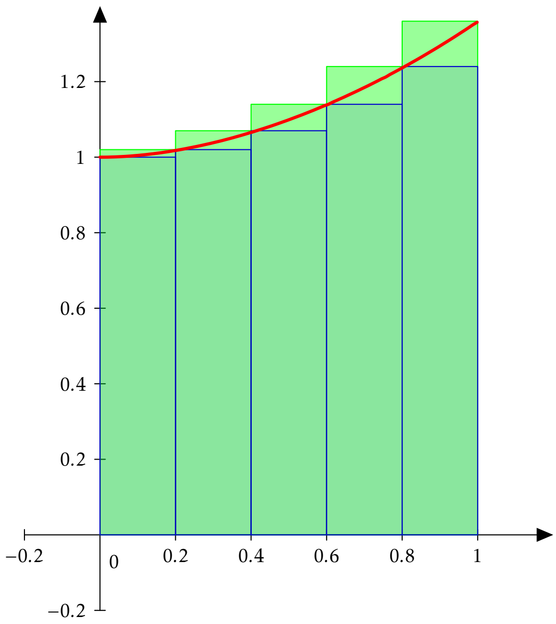
b) En sommant les inégalités précédentes pour k compris entre 0 et 4, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{4} \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right).$$

Or :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{4} f\left(\frac{k}{5}\right) = \frac{1}{5} \mathrm{S}_4.$

  Une figure pour illustrer :



- $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}\,dx$ (Relation de Chasles).
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right) = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}f\left(\frac{k+1}{5}\right) = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5}f\left(\frac{k}{5}\right) = \frac{1}{5}(S_5-1)$.

Il en résulte :

$$\frac{1}{5}S_4 \leqslant \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}\,dx \leqslant \frac{1}{5}(S_5-1).$$

c) On trouve, à 10^{-4} près : $S_4 \approx 5{,}4587$ et $S_5 \approx 6{,}8178$.
D'où : $\frac{1}{5}(S_4) \approx 1{,}0917$ qu'on **minore** par 1,091
et $\frac{1}{5}(S_5-1) \approx 1{,}1636$ qu'on **majore** par 1,164.

Ce qui nous donne l'encadrement : $1{,}091 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+x}\,dx \leqslant 1{,}164$.

3. *a*) Pour tout réel x de $[0\,;1]$, on a :

$$1-x+\frac{x^2}{1+x} = \frac{(1-x)(1+x)+x^2}{1+x} = \frac{(1-x^2)+x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}.$$

Donc, pour tout réel x de $[0\,;1]$, on a : $\frac{1}{1+x} = 1-x+\frac{x^2}{1+x}$.

b) En multipliant par e^x dans l'égalité précédente, on obtient, pour tout réel x de $[0\,;1]$:

$$\frac{e^x}{1+x} = (1-x)e^x + \frac{x^2e^x}{1+x}.$$

D'où, en intégrant de 0 à 1 :

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+x}\,dx = \int_0^1 (1-x)e^x\,dx + I.$$

c) Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = (2-x)e^x$.
Calculer $\phi'(x)$
$\phi'(x) = 1 \times e^x + (2-x)e^x = e^x(2-x+1) = e^x(1-x)$
On en déduit le calcul de $\displaystyle\int_0^1 (1-x)e^x\,dx = \int_0^1 \phi'(x)\,dx = \phi(1)-\phi(0) = e-2$.

Une autre méthode ? Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-x)e^x\,dx$, les fonctions sous le signe somme étant continues, ainsi que leurs dérivées, on peut effectuer une intégration par parties. Posons :

$$\left|\begin{array}{l} u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = 1 - x \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} u(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = -1 \end{array}\right.$$

$$u(x)v'(x) = -\mathrm{e}^x$$

D'où :

$\displaystyle\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[(1-x)\mathrm{e}^x\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[(1-x)\mathrm{e}^x\right]_0^1 + \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 =$

$\left[(1-x)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\right]_0^1 = \left[(2-x)\mathrm{e}^x\right]_0^1 = \mathrm{e} - 2.$

Ainsi :

$$\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2.$$

d) Puisque $\displaystyle \mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x - (\mathrm{e}-2),$

On déduit de l'encadrement obtenu au **2.c** que :

$$1{,}091 - (\mathrm{e}-2) \leqslant \mathrm{I} \leqslant 1{,}164 - (\mathrm{e}-2).$$

D'où l'encadrement d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1} suivant :

$$0{,}37 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 0{,}45.$$